広義積分で定義された関数

岡山　学

2011 年 10 月 31 日

目次

1　**広義積分**　1

2　**ガンマ関数**　2

3　**ベータ関数**　3

1　広義積分

図 1 は関数 $y = 1/\sqrt{x}$ のグラフである。この関数の $(0, 1)$ での積分

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

を考える。

関数 $y = 1/\sqrt{x}$ は $x > 0$ で連続であるが，$x = 0$ では定義されていないので，そのままでは定積分も定義できない。そこで

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\delta \downarrow 0} \int_\delta^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2$$

と考える。

一般に，$f(x)$ は $a < x < b$ で連続で，その原始関数 $F(x)$ が a における右極限値

$$\lim_{h \downarrow 0} F(a + h) = F(a + 0)$$

と b における左極限値

$$\lim_{h \downarrow 0} F(b - h) = F(b - 0)$$

を持っているとする。このとき

$$\int_a^b f(x)dx = F(b - 0) - F(a + 0)$$

と定義する。これを**広義積分**という。$a = -\infty$，$b = \infty$ のときも極限値を用いて定義する。

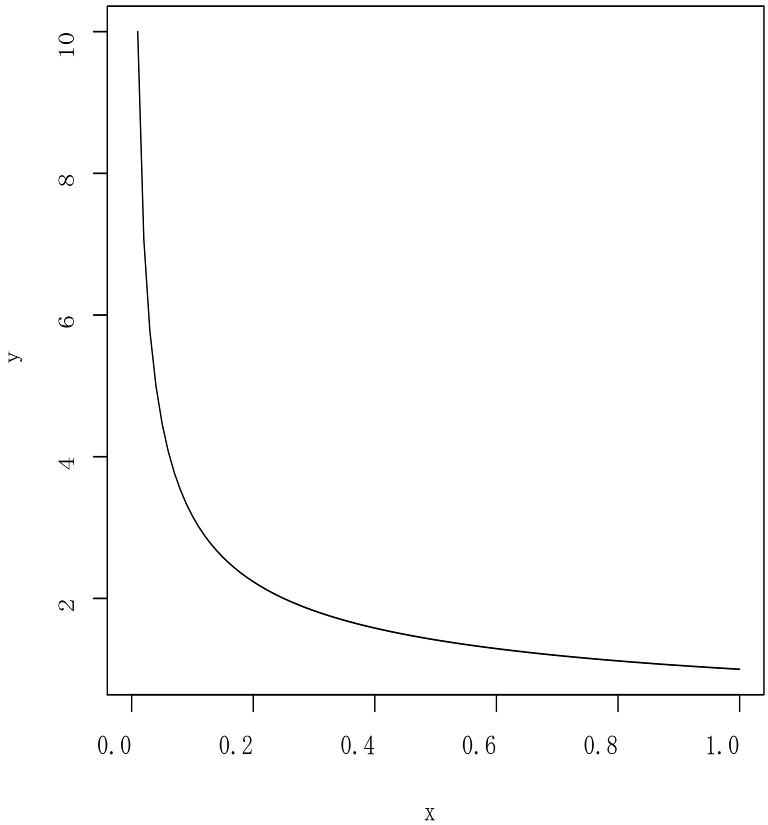

図１　関数 $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ のグラフ

2　ガンマ関数

$s > 0$ のとき

$$\int_0^\infty e^{-x} x^{s-1} dx \tag{1}$$

は収束する。これを**ガンマ関数**といい $\Gamma(s)$ で表す。(1) より，$\Gamma(s) > 0$ であることが分る。

さらに次の等式が成り立つ。

$$\Gamma(s+1) = \Gamma(s)$$

特に，$\Gamma(1) = 1$ であるから，$\Gamma(n+1) = n!$ を得る。

3　ベータ関数

$\alpha, \beta > 0$ に対して

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx$$

は収束する。これを 2 変数 α, β の**ベータ関数**という。

参考文献

[1] 青本和彦　微分と積分 1　岩波書店 1995

[2] 東京大学教養学部統計学統計学教室 編　統計学入門　東京大学出版会 1991